VOORRAADMODELLEN MET MEERDERE PRODUKTEN EN BEPERKINGEN

door

J. VANDER EECKEN en M. LAMBRECHT

Onderzoeksrapport Nr. 7505.

VOORRAADMODELLEN MET MEERDERE PRODUKTEN EN BEPERKINGEN

J. VANDER EECKEN en M. LAMBRECHT *

I. INLEIDING

De modellen die hier behandeld worden zijn deterministische meerdere-produkten modellen. Voor elk van de beschouwde produkten wordt verondersteld dat de vraag met zekerheid gekend is (of nauwkeurig kan geschat worden) en het vraagritme min of meer konstant is. De besteltijd, tijd tussen het plaatsen en het ontvangen van een bestelling, evenals andere systeem parameters, zoals kosten, zijn eveneens met zekerheid gekend (of nauwkeurig te schatten), konstant doorheen de tijd en onafhankelijk van de bestelde hoeveelheden.

Het probleem m.b.t. deze voorraadmodellen bestaat in het bepalen van het bestelogenblik en de bestelhoeveelheid. Daar het vraagritme konstant is wordt een bestelpunt voorraadpolitiek, voorgesteld door (Q,r), aangenomen : een zelfde hoeveelheid Q wordt besteld telkens de voorraad het bestelpunt r onderschrijdt. Het probleem herleidt zich dan tot het bepalen van Q^o, de optimale bestelhoeveelheid, ook de ekonomische ordergrootte genoemd, en r^o het optimale bestelpunt. Dit gebeurt door middel van een wiskundig model dat de jaarlijkse voorraadkosten uitdrukt in funktie van de twee beslissings-

* J. Vander Eecken is professor aan het Departement Toegepaste Economie van de K.U.L.
M. Lambrecht is assistent aan hetzelfde Departement waar hij zijn doctorale studies voltooit.
De auteurs danken de professoren F. Van Winckel en W. Herroelen voor hun suggesties en kritische opmerkingen.

variabelen Q en r. Q^o en r^o worden gevonden door deze kosten te minimaliseren.

Teneinde de uiteenzetting zo duidelijk mogelijk te houden zal in hetgeen volgt het meest eenvoudige voorraadsysteem verondersteld worden nl. het systeem van Camp, dat aan de basis ligt van de meer algemene modellen die in de literatuur behandeld worden. Uitbreiding tot deze meer ingewikkelde modellen brengt evenwel geen moeilijkheden met zich mee. Ter informatie wordt dit basismodel weergegeven in Appendix A.

Bij de studie van voorraadsystemen, waarbij meerdere produkten opgeslagen worden, en waar voor elk produkt afzonderlijk een van de hierboven vermelde modellen van toepassing is, doen er zich bij afwezigheid van interakties tussen de verschillende produkten geen moeilijkheden voor. De gemiddelde jaarlijkse voorraadkosten K van een n-produkten voorraadsysteem kan uitgedrukt worden in funktie van $2\,n$ beslissingsvariabelen Q_j en r_j, $j = 1, \ldots, n$, en wel als volgt :

$$K = \sum_{j=1}^{n} K_j\,(Q_j,\, r_j)$$

waarbij K_j de jaarlijkse voorraadkosten voorstelt van produkt j, bestaande uit enerzijds bestelkosten en anderzijds rentekosten. Het is duidelijk dat de minimale waarde van K bekomen wordt voor minimale waarden van K_j, zodat de één-produkt modellen van toepassing zijn.

In vele praktische gevallen moeten evenwel geaggregeerde beperkingen in rekening gebracht die wel degelijk interacties veroorzaken tussen verschillende individuele produkten zodanig dat geen oplossing kan gevonden worden door voor elk produkt afzonderlijk een optimale voorraadpolitiek te bepalen. Het voorraadsysteem moet nu in zijn geheel bestudeerd worden. Deze beperkingen kunnen betrekking hebben op de produktie uitrusting (aantal beschikbare machines), opslagplaats (beschikbare ruimte), tijd (maximale tijd die gebruikt kan worden voor het instellen van machines of voor het uitvoeren van bestellingen) en geld (beperkt kapitaal beschikbaar voor voorraadinvesteringen). Het is duidelijk dat terzelfder tijd meerdere beperkingen aanwezig kunnen zijn. Genoemde beperkingen kunnen nu eveneens uitgedrukt worden als ongelijkheden met $2\ n$ beslissingsvariabelen, zodat het probleem als volgt kan geformuleerd worden.

Gegeven de kapaciteiten C_i, $i = 1, \ldots, m$ bepaal

$$Q_j \text{ en } r_j \ , \ j = 1, \ldots, n$$

zodanig dat

$$K = K\ (Q_1, Q_2, \ldots Q_n \ ; r_1, r_2, \ldots, r_n)$$

minimaal is en

$$g_1\ (Q_1, Q_2, \ldots, Q_n \ ; \ r_1, r_2, \ldots, r_n) \leq C_1$$

$$g_2\ (Q_1, Q_2, \ldots, Q_n \ ; \ r_1, r_2, \ldots, r_n) \leq C_2$$

$$\vdots$$

$$g_m\ (Q_1, Q_2, \ldots, Q_1 \ ; \ r_1, r_2, \ldots, r_n) \leq C_m$$

Het vervolg van deze uiteenzetting spitst zich voornamelijk toe op het geval waarbij één beperking wordt in rekening gebracht. De twee meest gebruikte methoden om dit soort van problemen op te lossen zijn de "Methode van de Lagrange Multiplicatoren", die in de literatuur overvloedig behandeld wordt, o.a. in [1] , [2] , [3] en [4] , en de "LIMIT methode" van Plossl en Wight [5] die minder bekend is.

De discussie begint met het schetsen van een praktisch probleem dat de belangrijkheid van het gekozen voorraadsysteem illustreert en verder doorheen de studie als voorbeeld gebruikt wordt. De twee volgende paragrafen behandelen respectievelijk de hierboven genoemde methoden. In een vijfde paragraaf wordt voor het eerst bewezen dat deze twee oplossingstechnieken equivalent zijn in die zin, dat ze beide resulteren in dezelfde optimale oplossing, gegeven één bindende beperking. Het belang van dit bewijs volgt uit de eenvoud waarmee LIMIT de oplossing bekomt, in vergelijking met de methode van Lagrange. Tenslotte wordt in een laatste paragraaf de uitbreiding tot een meerdere-produkten voorraadsysteem met twee beperkingen besproken.

II. PRAKTISCH VOORBEELD [5]

Een produktieafdeling produceert een aantal produkten, gebruik makend van eenzelfde groep machines (bv. draaibanken, hydraulische persen, enz.). De individuele produkten zijn evenwel verschillend (bv. in vorm, afmeting, gebruikte grondstof, enz.) zodanig dat er zich bij omschakeling van de produktie van een produkt naar een ander, een niet-produktieve tijd voordoet die nodig is voor de juiste instelling van de machines. Deze insteltijd is onafhankelijk van de geproduceerde hoeveelheid en van de volgorde waarop de produkten geproduceerd worden (serieproduktie).

De huidige produktieorganisatie (aantal machines, gebruikte seriegrootten), waarmede aan de totale jaarlijkse vraag voor deze groep produkten voldaan wordt, resulteert in een totale insteltijd van 152,5 uren en een totale voorraadinvestering van $ 10.895. (zie Tabel I)

Teneinde de jaarlijkse voorraadkosten te minimaliseren wordt voorgesteld de seriegrootten te optimaliseren, gebruik makend van de gepaste formule (zie Appendix A). Deze ekonomische ordergrootten (zie Tabel I) veroorzaken een gevoelige daling (44 %) in de totale voorraadinvesteringen (van $ 10.895 tot $ 6.063) doch noodzaken een 43 % toename in de insteltijd, wat in de onmiddellijke toekomst onmogelijk te realiseren is. Een toename in de insteltijd kan enkel gerealiseerd worden door het machinepark uit te breiden of de samenstelling ervan te wijzigen. Met de beschikbare uitrusting kan de totale insteltijd niet verhoogd worden zonder de effectieve produktietijd te verlagen, wat voor gevolg zou hebben dat de jaarlijkse vraag niet meer zou kunnen voldaan worden. De vraag die dus moet gesteld worden is de volgende : gegeven een beperkte instelcapaciteit van 152,5 u. , bereken de seriegrootten die een minimale voorraadinvestering voor gevolg hebben zodanig dat de jaarlijkse voorraadkosten minimaal zijn. Het antwoord op deze vraag wordt gegeven door hogervermelde methoden. Deze worden hierna besproken.

III. DE METHODE VAN DE LAGRANGE MULTIPLICATOREN

Het algemeen probleem onder studie wordt op volgende wijze geformuleerd.

Bepaal Q_j en r_j , $j = 1, \ldots, n$

TABEL I GEGEVENS BETREFFENDE PRODUKTIEAFDELING A-J.

Produkt	Produktiekost per eenheid	Jaarlijkse Vraag (Eenheden)	Insteltijd per serie (uren)	Huidige seriegrootte			Optimale seriegrootte (1)		
				Eenheden	$	Insteltijd (2) (uren)	Eenheden (3)	$	Insteltijd
A	$ 6.12	3000	5.5	600	3672	27.5	274	1677	60.0
B	2.85	2000	6.0	350	998	34.3	343	977	35.0
C	0.56	8000	7.0	1500	840	37.4	1673	937	33.6
D	2.26	1100	4.0	400	904	11.0	233	527	18.9
E	4.08	600	4.0	300	1224	8.0	128	522	18.8
F	0.91	1200	2.0	950	864	2.5	271	246	8.9
G	3.09	300	4.0	150	1164	8.0	104	321	11.6
H	0.42	2000	2.0	1000	420	4.0	516	217	7.7
I	2.05	275	8.0	275	564	8.0	173	354	12.7
J	0.79	615	6.0	310	245	11.8	361	285	10.2
TOTAAL					10895	152.5		6063	217.4

(1) Verondersteld wordt dat de rentekosten 20 % bedragen van het geïnvesteerde kapitaal en een konstante instelkost van $ 2.80 per uur insteltijd

(2) jaarlijkse insteltijd per produkt $= \dfrac{\text{jaarlijkse vraag x insteltijd per serie}}{\text{seriegrootte}}$

(3) ekonomische seriegrootte $= \sqrt{\dfrac{\text{2 x jaarlijkse vraag x instelkosten per serie}}{\text{rentekosten per eenheid}}}$

b.v. voor produkt A : $Q^o = \sqrt{\dfrac{2 \times 3000 \times 5.5 \times 2.80}{.20 \times 6.12}} = 274$ eenheden zodanig dat

$$(1) \quad K = K\,(Q_1, Q_2, \ldots, Q_n \; ; \; r_1, r_2, \ldots, r_n)$$

minimaal is, en

$$(2) \quad g\,(Q_1, Q_2, \ldots, Q_n \; ; \; r_1, r_2, \ldots, r_n) \leq C$$

Bemerk dat in het geval de besteltijd gekend en konstant is, de bepaling van de bestelpunten r_j^o , $j = 1, \ldots, n$ triviaal is. (zie Appendix A) Daar de voorraadsystemen die hier behandeld worden aan deze voorwaarde voldoen zullen we verder deze variabelen buiten beschouwing laten.

A. Algemene oplossingsprocedure

1. Vooreerst wordt het probleem opgelost zonder rekening te houden met de van toepassing zijnde beperking, m.a.w. Q_j^o , $j = 1, \ldots, n$ worden berekend door elk produkt afzonderlijk te beschouwen. Indien deze optimale bestel- of produktiehoeveelheden voldoen aan de opgelegde beperking, dan vormen deze vanzelfsprekend de optimale oplossing van het globale meerdere-produkten voorraadprobleem.

2. In het andere geval wordt de Lagrange funktie L geschreven :

$$(3) \quad L = K\,(Q_1, Q_2, \ldots, Q_n) + \lambda \left[g\,(Q_1, Q_2, \ldots, Q_n) - C \right]$$

waarbij de multiplicator λ als volgt bepaald wordt

$$(4) \quad \lambda = 0 \quad \text{voor} \quad g(.) < C$$

$$\lambda > 0 \quad \text{voor} \quad g(.) = C$$

zodanig dat $\lambda \left[g\,(Q_1, Q_2, \ldots, Q_n) - C\right] = 0$ en de Lagrange funktie L dezelfde waarde aanneemt als de oorspronkelijke kostenfunktie K.
Men kan aantonen dat de optimale oplossing voor het probleem (1) en (2) bekomen wordt door (3) te minimaliseren, m.a.w. de optimale Q_j^*, $j = 1, \ldots, n$ en λ^* worden bepaald door het volgende stelsel van $n+1$ vergelijkingen in $n+1$ onbekenden op te lossen.

$$\frac{\delta L}{\delta \lambda} = 0$$

$$\frac{\delta L}{\delta Q_j} = 0 \quad , \quad \text{voor} \quad j = 1, \ldots, n$$

B. Voorbeeld

De jaarlijkse voorraadkosten voor het in paragraaf II beschreven praktisch voorbeeld omvat instelkosten en rentekosten en kan als volgt geschreven worden

$$(5) \quad \sum_{j=1}^{n} \left[\frac{D_j . k . S_j}{Q_j} + \frac{1}{2}\, I \,.\, C_j \,.\, Q_j \right]$$

waarbij

D_j = jaarlijkse vraag (verbruik) van produkt j

k = instelkosten per uur, konstant voor alle produkten (gebeurt door dezelfde gespecialiseerde arbeiders)

S_j = insteltijd in uren voor produkt j

Q_j^* = de optimale seriegrootte (produktiehoeveelheid) rekening houdend met de bindende beperking

C_j = de produktiekosten per eenheid produkt j

I = rentekostenfaktor uitgedrukt als een fraktie ($ per $ in voorraad)

n = aantal produkten.

De opgelegde beperking heeft betrekking op de beschikbare insteltijd en neemt de volgende vorm aan

$$(6) \quad \sum_{j=1}^{n} \frac{D_j . S_j}{Q_j} \leq H_L$$

waarbij

H_L de maximaal beschikbare insteltijd voor de produktieafdeling (gelijk aan de insteltijd overeenkomstig de huidige seriegrootten) voorstelt.

Kostenfunktie (5) en beperking (6) geven aanleiding tot de volgende Lagrange funktie

$$(7) \quad L = \sum_{j=1}^{n} \left[\frac{D_j \; k \; S_j}{Q_j} + \frac{I.C_j \; Q_j}{2} \right] + \lambda \left[\sum_{j=1}^{n} \frac{D_j \; S_j}{Q_j} - H_L \right]$$

die minimaal wordt voor

$$(8) \quad \frac{\delta L}{\delta Q_j} = - \frac{D_j \; k \; S_j}{Q_j^2} + \frac{I \; C_j}{2} - \frac{\lambda D_j \; S_j}{Q_j^2} = 0 \qquad \text{voor } \forall \; j$$

en

$$(9)\qquad \frac{\delta L}{\delta \lambda} = \sum_{j=1}^{n} \frac{D_j\ S_j}{Q_j} - H_L = 0$$

De vergelijkingen (7) en (8) hebben een unieke oplossing

$$(10)\qquad Q_j^* = \sqrt{\frac{2\ D_j\ S_j (k + \lambda^*)}{I\ C_j}}$$

waarbij λ^* de oplossing is van de vergelijking

$$(11)\qquad \sum_{j=1}^{n} \frac{D_j\ S_j}{\sqrt{\frac{2\ D_j S_j (k + \lambda^*)}{I\ C_j}}} = H_L$$

Uit deze laatste vergelijking verkrijgt men

$$(12)\qquad \lambda^* = \left[\sum_{j=1}^{n} \sqrt{\frac{D_j\ S_j\ I\ C_j}{2\ H_L^2}} \right]^2 - k$$

Passen wij dit toe op de cijfergegevens van Tabel I dan volgt uit (12) voor λ^* de waarde 2,90. Vergelijking (10) geeft dan de optimale seriegrootten voor het globale voorraadsysteem. (zie Tabel II)

Wij merken op dat de nodige insteltijd gelijk is aan de op het huidige ogenblik gebruikte insteltijd, bij veronderstelling de maximaal

TABEL II OPTIMALE SERIEGROOTTEN REKENING HOUDEND MET DE BEPERKTE INSTELTIJD

Produkt	Optimale Seriegrootte		
	Eenheden	$	Insteltijd (uren)
A	392	2399	42.1
B	490	1396	24.4
C	2387	1337	23.5
D	333	753	13.2
E	183	747	13.1
F	388	353	6.2
G	149	460	8.1
H	737	309	5.4
I	247	506	8.9
J	516	407	7.2
TOTAAL		8667	152.1

beschikbare capaciteit, terwijl de totale voorraadinvesteringen slechts $ 8661 bedragen, wat tegenover de huidige toestand een daling van 15 % betekent. Een laatste interessante bemerking betreft de economische interpretatie van de Lagrange Multiplicator λ^*. In het behandeld voorbeeld stelt λ^* de schaduwprijs (imputed value) voor van een uur insteltijd. Deze informatie kan nuttig gebruikt worden bij het evalueren van beslissingen m.b.t. het al dan niet doorvoeren van veranderingen in de produktieorganisatie. In het bijzonder, indien λ^* groter is dan de in werkelijk aangerekende instelkost per uur, dan heeft de onderneming voordeel door meer insteltijd te voorzien voor het produceren van kleinere seriegrootten.

IV. "LIMIT - LOT SIZE INVENTORY MANAGEMENT TECHNIQUE"

LIMIT is een alternatieve methode om beperkingen te verwerken in voorraadsystemen met meerdere produkten. Onmiddellijk dient evenwel opgemerkt dat, in tegenstelling met de methode van de Lagrange Multiplicatoren hier slechts één beperking toegelaten is.

LIMIT werd ontwikkeld rondom de filosofie dat I, de rentekostenfaktor, geen constante parameter is, doch een veranderlijke die afhankelijk is van de ondernemingspolitiek. M.a.w. I wordt aanzien als een impliciete waarde overeenkomstig een bepaalde politiek van het management. Door deze kostenfaktor een bepaalde waarde toe te kennen kan een bepaalde politiek bepaald worden, of omgekeerd, LIMIT geeft de manager de impliciete rentekostenfaktor overeenkomstig zijn beslissingen. Deze laatste zienswijze moet management er toe brengen rationeler politieken te volgen m.b.t. het voorraadbeheer.

A. Algemene oplossingsprocedure

Ter herinnering hernemen wij even de algemene formulering van het probleem.

Bepaal Q_j, $j = 1, \ldots , n$

zodanig dat

(13) $K = K\ (Q_1, Q_2, \ldots, Q_n)$

minimaal is, en

(14) $g\ (Q_1, Q_2, \ldots , Q_n) \leq C$

Vooreerst berekenen we Q_j^o , $j = 1 , \ldots , n$, de ekonomische ordergrootten zonder beperkingen, gegeven de in de onderneming aangerekende rentekostenfaktor I

$$(15) \quad Q_j^o = \sqrt{\frac{2\, D_j\, A_j}{I\, C_j}}$$

waarbij D_j en C_j bepaald zijn als voordien (zie paragraaf III) en A_j de bestel- of instelkosten aanduidt per bestelling en per produkt. Substitueer (15) en (14) en stel

$$(16) \quad g\,(Q_1^o\,,\, Q_2^o\,,\, \ldots\,,\, Q_n^o) = G^o \qquad (16)$$

Het is duidelijk dat verschillende waarden van I aanleiding zullen geven tot verschillende waarden van Q_j^o , $\forall\, j$, die op hun beurt zullen resulteren in verschillende waarden van G^o.

Indien $G^o \leq C$ dan is de oplossing gevonden, namelijk Q_j^o , $j = 1 , \ldots , n$.

Indien $G^o > C$ maken we gebruik van vergelijking (16) om I expliciet uit te drukken in funktie van gekende parameters van het systeem namelijk deze die Q_j^o bepalen en G^o .

Stel

$$(17) \quad I = f_1\,(G^o)\; .\; f_2\,(D_j, A_j, C_j, j = i , \ldots , n)$$

waarbij $f_1(x)$ gelijk is aan x^2 of $1/x^2$ naargelang de Q_j^o 's respectievelijk in de noemer of de teller van beperking (14) voorkomen. (cfr. uitdrukking (23)

Het probleem kan nu "technisch" als volgt gesteld worden. Welke rentekostenfaktor resulteert in bestel(produktie)hoeveelheden die zodanig zijn dat $g(.) = C$ en de jaarlijkse voorraadkosten minimaal zijn. M.a.w. wij zoeken de impliciete rentekostenfaktor I_L die voldoet aan

(18) $I_L = f_1(C) \cdot f_2\,(D_j, A_j, C_j\ ;\ j = 1\ , \ldots , n)$

Door uitdrukking (18) te delen door (17) en rekening houdend met het feit dat de funktie $f_2(.)$ een konstante is voor een bepaalde groep van produkten bekomen we :

(19) $I_L = I \cdot \dfrac{f_1(C)}{f_1(G^o)}$, "LIMIT formule 1"

De oplossing voor het systeem met de bindende beperking (14) wordt uiteindelijk gevonden door (19) te substitueren in (15). Stel deze oplossing voor door Q_j^L , $j = 1, \ldots , n$ dan bekomt men

$$Q_j^L = \sqrt{\frac{f_1(G^o)}{f_1(C)}} \cdot Q_j^o$$

of

$$Q_j^L = M\, Q_j^o$$

waarbij

(20) $M = \sqrt{\dfrac{f_1(G^o)}{f_1(C)}}$, "LIMIT Formule 2"

Op te merken valt dat, alhoewel de auteurs beweren dat de LIMIT formules een optimale oplossing geven in de zin dat, rekening houdend met de opgelegde beperking, de jaarlijkse voorraadkosten minimaal zijn, zij dit nergens bewijzen. In paragraaf III wordt dit bewijs geleverd.

B. Voorbeeld

De optimale seriegrootten voor een gegeven (geschatte) rentekostenfaktor I in afwezigheid van bindende beperkingen zijn :

$$(21) \quad Q_j^o = \sqrt{\frac{2\,D_j\,k\,S_j}{I\,C_j}} \;, \quad j = 1 \,, \ldots , n$$

Indien

$$(22) \quad H_o = \sum_{j=1}^{n} \frac{D_j}{Q_j} S_j < H_L$$

is het probleem opgelost. Veronderstellen we het tegenovergestelde dan moeten nieuwe sub-optimale seriegrootten, Q_j^L , $j = 1 , \ldots , n$ gezocht worden.

Substitutie van (21) in (22) geeft na vereenvoudiging

$$H_o = I \left\{ \sqrt{\frac{D_1 S_1 C_1}{2\,k}} + \sqrt{\frac{D_2 S_2 C_2}{2\,k}} + \ldots + \sqrt{\frac{D_n S_n C_n}{2\,k}} \right\}$$

of afgekort

$$H_o = \sqrt{I}\;B$$

en

$$(23) \quad I = \frac{H_o^2}{B^2}$$

waarbij B , voor een bepaalde groep van produkten, een konstante is onafhankelijk van de rentekostenfaktor I. Uitdrukking (23) is equivalent met (17) en drukt de rentekostenfaktor I uit in funktie van de overige systeemparameters en de variabele waarop de beperking slaat.

In analogie met (18) wordt nu de impliciete rentekostenfaktor I_L gezocht die volgende eigenschap heeft

$$(24) \quad I_L = \frac{H_L^2}{B^2}$$

Vergelijking (23) en (24) laten toe volgende LIMIT formules af te leiden[1].

$$(25) \quad I_L = I \cdot \frac{H_L^2}{H_o^2} \qquad \text{"LIMIT 1"}$$

Na substitutie van (25) in (21)

$$(26) \quad Q_j^L = M \cdot Q_j^o \quad , \quad \forall j$$

met

$$(27) \quad M = \frac{H_o}{H_L} \qquad \text{"LIMIT 2"}$$

Gegeven een bindende beperking, namelijk $H_o > H_L$,

het is duidelijk via (25) , (26) en (27) dat

$$I_L < I ,$$

$$M > 1 ,$$

$$Q_j^L > Q_j^o \quad ; \quad \forall j$$

1. De LIMIT formules voor de meest frekwent voorkomende beperkingen worden gegeven in Appendix B.

en uit (24) volgt dat

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{D_j}{Q_j^L} S_j = H_L < H_o .$$

M.a.w. de impliciete rentekostenfaktor die berekend wordt door het model is kleiner dan de rentekostenfaktor die voor het ogenblik gebruikt wordt in het bedrijf. De verklaring hiervan dient gezocht in het feit dat de huidige produktieorganisatie (uitrusting, efficiency, ...) de ideale voorraadpositie, gegeven I, niet toelaat.

Toegepast op de gegevens van Tabel I bekomt men voor de formules LIMIT 1 (25) en LIMIT 2 (27)

$$I_L = .20 \left(\frac{152.5}{217.4}\right)^2 = 0.098$$

$$M = \left(\frac{217.4}{152.5}\right) = 1.425$$

Vermenigvuldiging van de optimale seriegrootten (zie Tabel I) met 1,425 geeft de LIMIT hoeveelheden Q_j^L , $j = 1 , \ldots , n$ weergegeven in Tabel III.

Met uitzondering van enkele kleine afwijkingen veroorzaakt door afronding zijn deze resultaten identiek met deze van Tabel II, bekomen door middel van de methode van Lagrange Multiplicatoren.

Het is interessant op te merken dat de LIMIT methode als simulator kan gebruikt worden om de overgang van het huidig systeem $(H_L, I_L, Q_j^L ,$ $j = 1 , \ldots , n)$ naar het optimale systeem $(H_o, I , Q_j^o , j = 1 , \ldots , n)$

TABEL III   LIMIT-SERIEGROOTTEN

Produkt	Eenheden	$	Insteltijd (uren)
A	391	2393	42,3
B	490	1396	24,4
C	2389	1338	23,4
D	333	753	13,2
E	183	747	13,1
F	387	352	6,2
G	149	460	8,1
H	737	309	5,4
I	247	506	8,9
J	516	407	7,2
TOTAAL		8667	152,2

stapsgewijze te plannen. Dit gebeurt door de insteltijd achtereenvolgens uit te breiden van H_L tot H_{L_1}, H_{L_2}, ..., H_o gebruik makend van de LIMIT 1 formule om vervolgens via (26) en (27) de besparingen in rentekosten te berekenen waarmede deze capaciteitsuitbreiding gepaard gaat en die kunnen gebruikt worden om deze uitbreidingen te helpen financieren. Deze alternatieve aanwending van de LIMIT formules wordt voor het praktisch voorbeeld onder studie, geïllustreerd in Tabel IV.

TABEL IV REEKS ALTERNATIEVE TOTALE INSTELTIJDEN MET OVEREENKOMSTIGE TOTALE GEMIDDELDE VOORRAADPOSITIES

Impliciete voorraadkost (%)	Totale Insteltijd (uren)	Totale Instelkosten ($) ($ 2.80 per uur)	Totale Gemiddelde Voorraadinvesteringen ($)	M
(huidig systeem)	152.5	427	5097.5	-
4.2	100.0	280	6590.5	2.174
9.5	150.0	420	4392.5	1.449
9.8 (LIMIT)	152.2	426	4330.5	1.428
12.9	175.0	490	3765.0	1.242
17.0	200.0	560	3295.0	1.087
20.0 (GESCHAT)	217.4	609	3031.5	1.000
26.5	250.0	700	2637.5	0.870
38.0	300.0	840	2197.5	0.725
52.0	350.0	980	1882.5	0.621
68.0	400.0	1120	1649.0	0.544

M.a.w., indien voor de beschouwde groep van produkten een totale insteltijd van 175.0 u voorzien wordt, zullen de minimale gemiddelde voorraadinvesteringen $ 3765 bedragen. Dit wordt als volgt bekomen

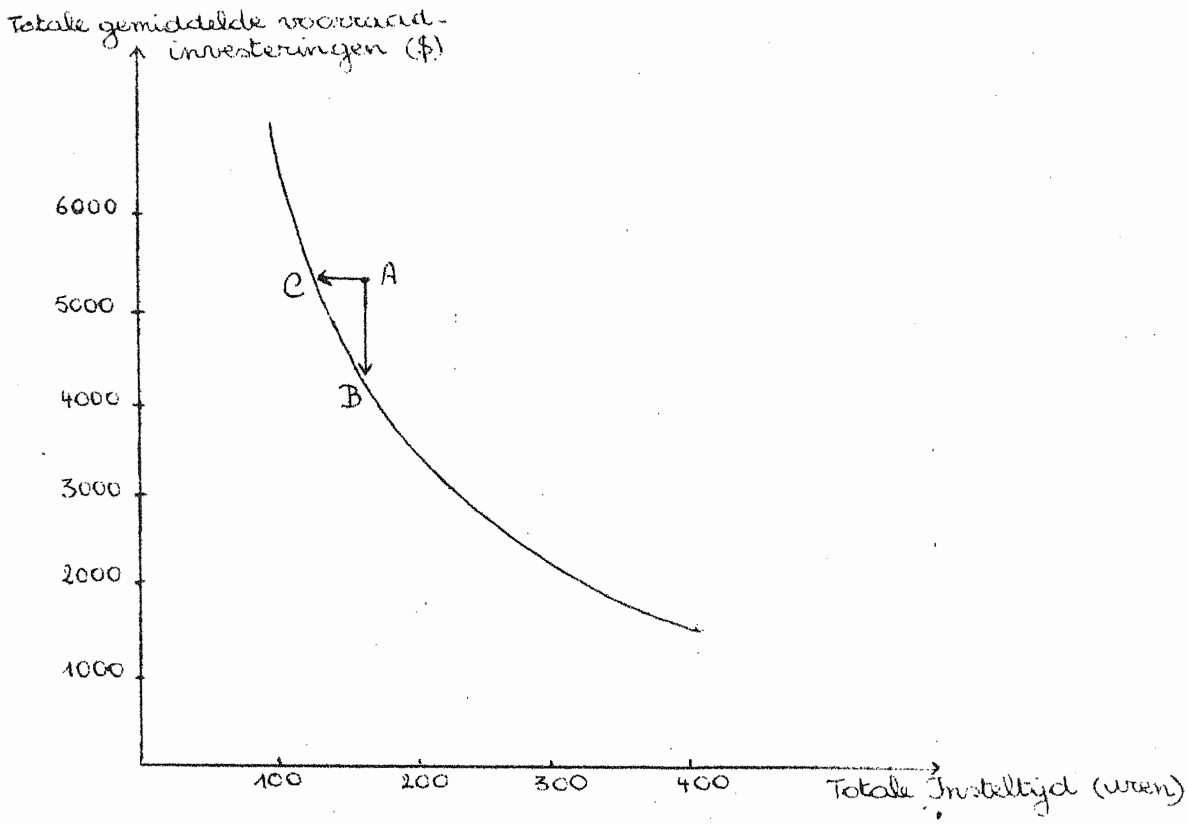
$$M^{*} = \frac{217.4}{175.0} = 1.242$$

$$Q^{*} = M^{*} Q_j^{o} \quad , \quad j = 1 , \ldots , n$$

waaruit de gevraagde gemiddelde voorraadinvesteringen

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{Q_j^{*}}{2} = M^{*} \sum_{j=1}^{n} \frac{Q_j^{o}}{2} = 1.242 \times 3031.5 = 3765$$

De gegevens van Tabel IV kunnen ook in grafiek worden uitgedrukt. (Figuur 1)



Figuur 1. Gemiddelde Voorraadinvesteringen vs. Insteltijd kromme

De huidige situatie wordt voorgesteld door punt A. De LIMIT situatie, d.i. het optimaal voorraadsysteem rekening houdend met de beperking op de insteltijd, wordt afgebeeld in punt B terwijl punt D overeenkomt met het meest economische voorraadsysteem in afwezigheid van beperkingen. Tevens illustreert Figuur 1 dat uitgaande van de huidige toestand, een voorraadsysteem kan gevonden worden waarbij de totale insteltijd minimaal is en de voorraadinvesteringen onveranderd blijven (punt C). Dit geeft een antwoord op de volgende vraag : minimaliseer de totale voorraadkosten $K = K(Q_1, \ldots, Q_n)$ zodanig dat de totale gemiddelde voorraadinvesteringen een gegeven bedrag niet overschrijden. (zie Appendix B)

V. OPTIMALITEIT VAN DE LIMIT METHODE

In deze paragraaf wordt bewezen dat de LIMIT techniek en de methode van Lagrange dezelfde oplossing geven. Het bewijs dat volgt heeft betrekking op het model dat gebruikt werd om deze twee methoden te bespreken (minimaliseren van totale voorraadkosten rekening houdend met insteltijdbeperking). De bewijzen zijn analoog voor voorraadsystemen met andere beperkingen (zie Appendix B) en worden dan ook niet gegeven.

Uitdrukking (12) kan geschreven worden als

$$\sqrt{k + \lambda^*} = \sum_{j=1}^{n} \sqrt{\frac{D_j S_j \; I \; C_j}{2 \; H_L^2}} \tag{28}$$

en substitutie van (28) in (10), de uitdrukking van de orderhoeveelheden die de Lagrange funktie minimaliseren, geeft na vereenvoudiging (de konstante 2 valt weg)

$$Q_j^* = \sqrt{\frac{D_j . S_j}{I . C_j}} \cdot \left[\sum_{j=1}^{n} \sqrt{\frac{D_j\ S_j\ I\ C_j}{H_L^2}} \right]$$

Na respectievelijk teller en noemer van de eerste term en teller en noemer van de term na het sommatieteken met $\sqrt{2k}$ te vermenigvuldigen bekomt men

$$(29) \quad Q_j^* = \sqrt{\frac{2\ D_j\ S_j\ k}{2\ k\ I\ C_j}} \cdot \left[\sum_{j=1}^{n} \sqrt{\frac{2\ D_j\ S_j\ k\ I\ C_j}{2\ k\ H_L^2}} \right]$$

Nu is

$$\sqrt{\frac{2\ D_j\ S_j\ k}{I\ C_j}} = Q_j^o$$

en

$$(30) \quad \sum_{j=1}^{n} \sqrt{2\ D_j\ S_j\ k\ I\ C_j} = \sum_{j=1}^{n} K_j^o = K^o$$

waarbij K^o de minimale totale voorraadkosten voorstelt voor de groep van n produkten in afwezigheid van beperkingen, zodat (29) kan herleid worden tot

$$(31) \quad Q_j^* = \frac{K^o}{2\ k\ H_L} \cdot Q_j^o \ , \quad \forall j \ .$$

M.a.w. de gezochte orderhoeveelheden worden gevonden door de onbeperkte optimale hoeveelheden Q_j^o , $j = 1 , \dots , n$ te vermenigvuldigen met een constante faktor $\frac{K^o}{2\,k\,H_L}$.

Om te bewijzen dat de LIMIT techniek optimaal is volstaat het aan te tonen dat de uitdrukkingen (26) en (31) gelijk zijn, m.a.w.

$$Q_j^* = Q_j^L \quad , \quad \forall j$$

of

$$\text{(32)} \qquad \frac{K^o}{2\,k\,H_L} = \frac{H_o}{H_L}$$

Substitutie van (30) in het linker gedeelte van (32) geeft

$$\frac{K^o}{2\,k\,H_L} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\sqrt{2\,D_j\,S_j\,k\,I\,C_j}}{2\,k\,H_L}$$

of anders geschreven

$$\text{(33)} \qquad \frac{K^o}{2\,k\,H_L} = \frac{\sum_{j=1}^{n} \sqrt{\frac{D_j\,S_j\,I\,C_j}{2\,k}}}{H_L}$$

Gegeven uitdrukkingen (32) en (33), herleidt het bewijs zich tot het aantonen dat H_o de totale insteltijd overeenkomstig de optimale produktiehoeveelheden Q_j^o , j = 1 , ... , n gelijk is aan

$$\sum_{j=1}^{n} \sqrt{\frac{D_j\, S_j\, I\, C_j}{2\, k}} \,.$$

Uit (21) en (22) volgt dat

$$H_o = \sum_{j=1}^{n} \left[\frac{D_j}{\sqrt{\dfrac{2\, D_j\, S_j\, k}{I\, C_j}}} \cdot S_j \right]$$

en na herrangschikking van de betrokken grootheden bekomt men

$$H_o = \sum_{j=1}^{n} \left[\sqrt{\frac{D_j\, S_j\, I\, C_j}{2\, k}} \right]$$

wat het bewijs vervolledigt[2] .

Zoals in de inleiding reeds werd benadrukt volgt het belang van dit bewijs uit de aantrekkelijkheid van LIMIT, gegeven de eenvoud en het brede toepasbaarheidsdomein van deze techniek die ten aanzien van de bedrijfsleiding in een bevattelijker en meer vertrouwde taal is uitgedrukt. De methode verzekert niet alleen een optimale voorraadpolitiek gegeven een bindende beperking, bovendien kan deze methode gebruikt worden om de overgang van deze sub-optimale oplossing naar de globale optimale oplossing te plannen en te helpen realiseren.

2. Appendix C bevat een veralgemeend bewijs van de optimaliteit van de LIMIT methode voor problemen met één bindende beperking. Dit bewijs werd ons bereidwillig gegeven door Prof. F. Van Winckel.

VI. MEERDERE-PRODUKTEN VOORRAADSYSTEMEN MET TWEE BEPERKINGEN

Veronderstel dat het voorraadsysteem onderhevig is aan twee beperkingen, zodat het probleem als volgt kan geformuleerd worden.

$$\text{Min. } K = K\,(Q_1\,,\,Q_2\,,\,\ldots\,,\,Q_n)$$

zodanig dat

$$g_1\,(Q_1\,,\,Q_2,\,\ldots\,,\,Q_n)\ \leq\ C_1$$

en $$g_2\,(Q_1\,,\,Q_2\,,\,\ldots\,,\,Q_n) \leq\ C_2$$

De eerste beperking kan bijvoorbeeld betrekking hebben op de totale insteltijd overeenkomstig de huidige jaarlijkse produktie van de n produkten terwijl de tweede beperking wijst op een beperkte opslagkapaciteit.

Er kunnen zich nu vier verschillende gevallen voordoen.

(a) Ofwel is geen van beide beperkingen bindend. In dit geval zijn de bestel- of produktiehoeveelheden Q_j^o , $j = 1, \ldots, n$, verkregen door $\frac{\delta K}{\delta Q_j} = 0$, $\forall j$, optimaal.

(b) Ofwel is slechts één van beide beperkingen bindend. In dit geval ontaardt het probleem tot een meerdere-produkten voorraadsysteem met één beperking, zodat de LIMIT methode van toepassing is.

(c) Ofwel zijn beide beperkingen gelijktijdig bindend. In dit geval bestaat er geen eenvoudige oplossingsmethode. Een verdere behandeling van dit probleem valt evenwel buiten het kader van deze studie.

(d) Ofwel zijn de beperkingen contradictorisch in de zin dat er geen waarden bestaan voor Q_j , $j = 1 , \ldots , n$, die tegelijkertijd aan beide beperkingen voldoen, m.a.w. het probleem heeft geen oplossing. Bijvoorbeeld, de opslagplaats en beschikbare insteltijd kunnen zodanig beperkt zijn dat er geen produktiehoeveelheden bestaan die de jaarlijkse vraag opvangen en voldoen aan beide beperkingen. Een discussie m.b.t. de nodige en voldoende voorwaarden voor het bestaan van een oplossing valt eveneens buiten het bestek van deze studie.

De volgende procedure kan nu gevolgd worden om de optimale oplossing te vinden (in de veronderstelling dat een oplossing bestaat).

1. Bereken Q_j^o , $j = 1 , \ldots , n$. Indien deze hoeveelheden voldoen aan de beperkingen $g_1(.)$ en $g_2(.)$, m.a.w. indien

$$g_1 (Q_1^o , Q_2^o , \ldots , Q_n^o) \leq C_1$$

en $g_2 (Q_1^o , Q_2^o , \ldots , Q_n^o) \leq C_2$

dan vormen zij de optimale oplossing van het probleem. Indien aan één van beide of aan beide beperkingen niet voldaan wordt, ga naar 2.

2. Bereken de LIMIT hoeveelheden $Q_j^{L_1}$, $j = 1 , \ldots , n$ in de veronderstelling dat $g_1(.)$ bindend is.

Indien

$$g_2 (Q_1^{L_1} , Q_2^{L_1} , \ldots , Q_n^{L_1}) \leq C_2$$

dan is het probleem opgelost. In het ander geval worden de LIMIT hoeveelheden $Q_j^{L_2}$, $j = 1, \ldots, n$ berekend in de veronderstelling dat $g_2(.)$ bindend is. Indien

$$g_1\ (Q_1^{L_2}, Q_2^{L_2}, \ldots, Q_n^{L_n}) \leq C_1$$

dan is de oplossing gevonden. Is dit niet het geval dan zijn beide beperkingen bindend en moet een andere meer ingewikkelde methode aangewend worden om de gevraagde bestel- of produktiehoeveelheden te bepalen.

APPENDIX A

Stel

D = vraag in eenheden per jaar

A = vaste bestel- of instelkost

C = aankoop- of produktiekosten per eenheid

I = rentekostenfaktor uitgedrukt als een fractie
(kost om 1 F produkt 1 jaar in voorraad te houden)

Q = bestel- of produktiehoeveelheid

K = jaarlijkse voorraadkosten

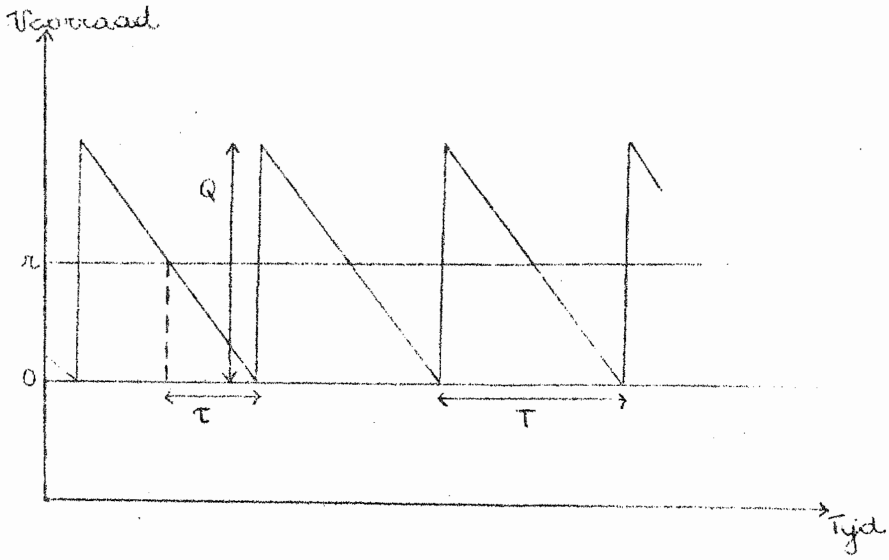
T = tijd tussen twee opeenvolgende bestellingen (uitgedrukt in jaren)

r = bestelpunt

τ = besteltijd (tijd die verloopt tussen het plaatsen en het ontvangen van een bestelling of produktieorder, uitgedrukt in jaren)

m = aantal uitstaande bestellingen of orders gelijk aan het grootste geheel getal kleiner of gelijk aan $\frac{\tau}{T}$

De struktuur van de (Q,r) voorraadpolitiek wordt weergegeven in Figuur 2.



Figuur 2. Basisstruktuur van de (Q,r) voorraadpolitiek

Voor de vooropgestelde hypothesen zijn de totale voorraadkosten K gelijk aan de som van de bestelkosten en rentekosten of

$$K = \frac{A.D}{Q} + I\,C\,\frac{Q}{2} \qquad (a)$$

De optimale ordergrootte wordt gevonden door $\frac{\delta k}{\delta Q} = 0$ wat resulteert in

$$Q^o = \sqrt{\frac{2\,D\,A}{I\,C}} \qquad (b)$$

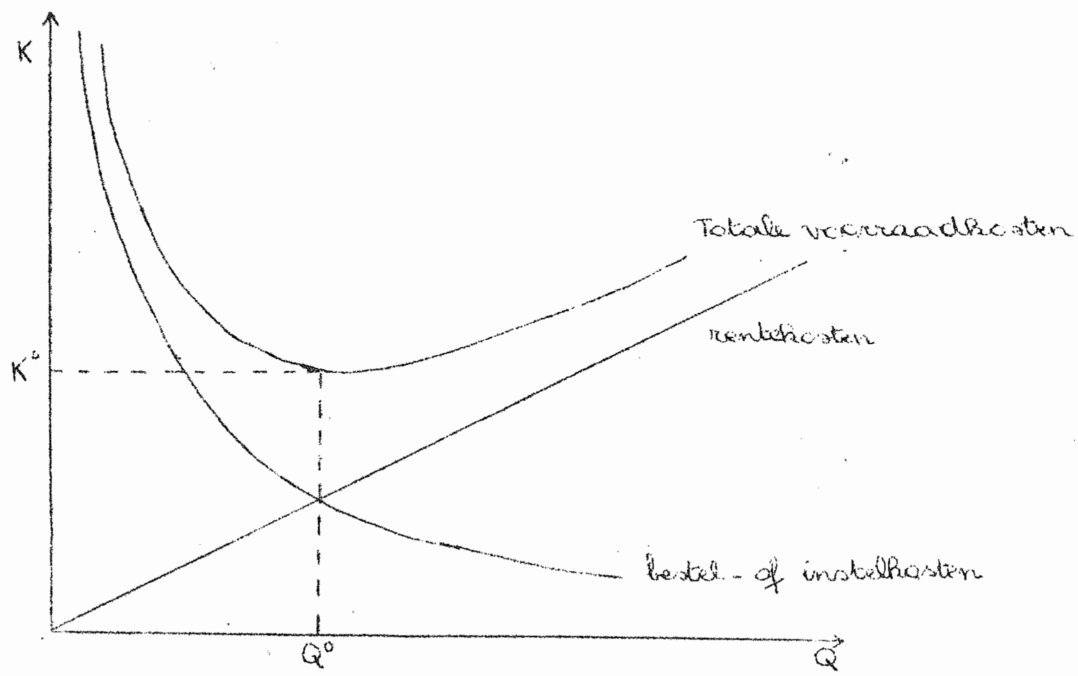
Substitutie van (b) in (a) geeft de minimale gemiddelde jaarlijkse kosten

$$K^o = \sqrt{2\,D\,A\,I\,C} \qquad (c)$$

In de veronderstelling dat de totale vraag volledig en tijdig moet voldaan worden wordt het bestelpunt gegeven door

$$r^o = \tau\,D - m\,Q\,.$$

Figuur 3 geeft de grafische voorstelling van (a) , (b) en (c).



Figuur 3. Totale voorraadkosten vs. ordergrootte

APPENDIX B

LIMIT formules voor alternatieve modellen

Zonder beperkingen ziet het model er als volgt uit

$$\text{Min } K = \sum_{j=1}^{n} \left[\frac{D_j}{Q_j} \, k \, S_j + \frac{Q_j}{2} \, . \, I \, C_j \right]$$

waaruit

$$Q_j^o = \sqrt{\frac{2 \, D_j \, k \, S_j}{I \, C_j}} \quad , \qquad \forall j$$

I. Beperking m.b.t. de gemiddelde jaarlijkse voorraadinvesteringen

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{Q_j}{2} \leq K_L$$

$$\text{LIMIT 1} \quad : \quad I_L = I \left[\frac{K_o}{K_L} \right]^2$$

$$\text{LIMIT 2} \quad : \quad M = \frac{K_L}{K_o}$$

K_L is de maximaal toegelaten gemiddelde jaarlijkse investeringen voor de groep produkten $j = 1 , \ldots , n$ en K_o duidt de gemiddeld jaarlijkse voorraadinvesteringen aan overeenkomstig de optimale ordergrootten Q_j^o , d.i. $\sum_{j=1}^{n} \frac{Q_j^o}{2}$. De LIMIT formules zijn analoog wanneer de beperking betrekking heeft op de totale jaarlijkse voorraadinvestering m.a.w.

$$\sum_{j=1}^{n} Q_j \leq K_L' .$$

In het laatste geval wordt verondersteld dat de orders gelijktijdig in de voorraad worden opgenomen.

II. Beperking m.b.t. het jaarlijks totaal aantal bestellingen

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{D_j}{Q_j} \leq N_L$$

$$\text{LIMIT 1} \quad : \quad I_L = I \left[\frac{N_L}{N_o} \right]^2$$

$$\text{LIMIT 2} \quad : \quad M = \frac{N_o}{N_L}$$

N_L is het maximaal aantal bestellingen dat per jaar kan verwerkt worden door de aankoopafdeling (bijvoorbeeld het huidige aantal verwerkte orders)

en $N_o = \sum_{j=1}^{n} \frac{D_j}{Q_j^o}$.

III. Beperking m.b.t. de gemiddeld beschikbare opslagruimte

$$\sum_{j=1}^{n} k_j \frac{Q_j}{2} \leq O_L$$

$$\text{LIMIT 1} \quad : \quad I_L = I \left[\frac{O_o}{O_L} \right]^2$$

$$\text{LIMIT 2} \quad : \quad M = \frac{O_L}{O_o}$$

O_L gemiddeld beschikbare opslagplaats (in m^2 of m^3) ,

k_j is de oppervlakte (m^2) of ruimte (m^3) ingenomen per eenheid van produkt j en $O_o = \sum_{j=1}^{n} k_j \frac{Q_j^o}{2}$. De LIMIT formules zijn analoog wanneer de totale ingenomen ruimte belangrijk is, m.a.w. indien $\Sigma\, k_j\, Q_j \leq O_L'$.

In dit geval wordt verondersteld dat de orders gelijktijdig in de voorraad worden opgenomen.

APPENDIX C

Minimalisatie met nevenvoorwaarde

Een methode met parameteraanpassing

Gegeven $\begin{cases} \min f(\vec{x}\,;\,a) \\ g(\vec{x}) \leq c \end{cases}$

$$a\,,\,c \in \mathbb{R} \quad ; \quad f,g : \mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{R} \quad ; \quad \mathrm{Opl}\left[\, g(\vec{x}) \leq c \,\right] = E^n \subset \mathbb{R}^n_+$$

Stap 1 (hyp) $\forall \vec{x} \in O_{\vec{x}^*} \;:\; f(\vec{x};a) \geq f(\vec{x}^*;a)$

$$\mathrm{Opl}\left[\frac{\delta}{\delta \vec{x}} f(\vec{x}\,;\,a) = \vec{0}\right] = \{\, \vec{x}^*(a)\,,\,\ldots \}$$

$$g(\vec{x}^*) \leftrightarrow c$$

$$g(\vec{x}) \leq c \Rightarrow \vec{x}^*(a) \text{ is optimaal}$$

Stap 2 $g(\vec{x}^*) = c^* > c$

$$\forall a : \vec{x}^*(a) \Rightarrow g(a) = c^*$$

$$\text{(hyp)} \quad g : \mathbb{R} \overset{\text{ens}}{\to} \mathbb{R} \Rightarrow a = g^{-1}(c^*)$$

Stap 3 $\hat{a} = g^{-1}(c)$

$$\text{(hyp) } f,g \text{ convex} \Rightarrow \vec{x}^*(\hat{a}) \text{ is optimaal.}$$

BIBLIOGRAFIE

[1] BOWMAN, E.H. and FETTER, R.B., "Analysis for Production and Operations Management", Richard D. Irwin, Inc., Homewood, Illinois, 1967.

[2] CHURCHMAN, C.W., ACKOFF, R.L. and ARNOFF, E.L., "Introduction to Operations Research",John Wiley & Sons, N.Y., 1957.

[3] ELMAGHRABY, S.E., "The Design of Production Systems",Reinhold Publishing Corporation, N.Y., 1966.

[4] JOHNSON, L.A. and MONTGOMERY, D.C., "Operations Research in Production Planning, Scheduling and Inventory Control", John Wiley & Sons, N.Y., 1974.

[5] PLOSSL, G.W. and WIGHT, O.W., "Production and Inventory Control", Prentice-Hall Inc., Englewood Cliffs, N.J., 1967.